

ESSEBIL AU BAC

MATHS

TERMINALE D

Tome 1

1^{er} trimestre

**Horma Ould Hamoud
Inspecteur de Mathématiques**

I. RESUME DE COURS

Le nombre i

Il existe dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ un élément n'appartenant pas à $\mathbb{R}$, noté i tel que $i^2 = -1$.

Le nombre i est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $x^2 + 1 = 0$.

On a alors : $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $\frac{1}{i} = -i$.

Opérations dans $\mathbb{C}$

Soient a, b, a' et b' des réels. $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$.

1) $(a + ib = a' + ib') \Leftrightarrow (a = a'; b = b')$	4) $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
2) $z + z' = a + a' + i(b + b')$	5) $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
3) $zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b)$	6) $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$
7) $a + ib \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}$	

Définitions et vocabulaire

Soient a et b des réels et $z = a + ib$.

Forme algébrique de z	L'écriture $z = a + ib$
Partie réelle de z	$\text{Re}(z) = a$
Partie imaginaire de z	$\text{Im}(z) = b$
Le conjugué de z	$\bar{z} = a - ib$
Le module de z	$ z = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
Argument de z où $z \neq 0$. On note $\arg z$	$\arg z = \theta \Rightarrow \left(\cos \theta = \frac{a}{ z }, \sin \theta = \frac{b}{ z } \right)$
Forme trigonométrique de z avec ($z \neq 0; \arg z = \theta$)	$z = z (\cos \theta + i \sin \theta)$
Forme exponentielle de z avec ($z \neq 0; \arg z = \theta$)	$z = z e^{i\theta}$

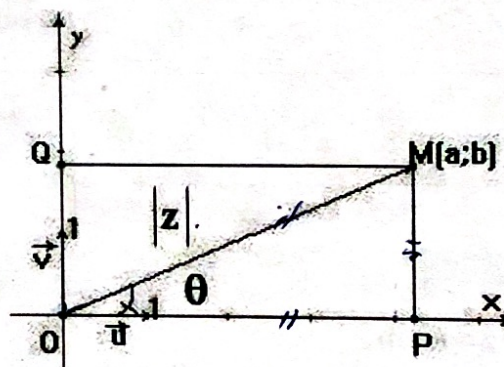
Représentation géométrique des nombres complexes

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soient a et b des réels.

A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer le point $M(a; b)$ du plan.

Le plan est appelé le plan complexe.

Le point image du nombre complexe $z = a + ib$	$M(a; b)$
Le vecteur image du nombre complexe $z = a + ib$	$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$
L'affixe du point $M(a; b)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	Le nombre complexe $z = a + ib$
L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$	Le nombre $z_B - z_A$
L'affixe du milieu du segment $[AB]$	Le nombre $\frac{z_A + z_B}{2}$
La distance AB	$AB = z_B - z_A $



Conjugué d'un nombre complexe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et z, z_1, z_2 des nombres complexes.

1) $z = a + ib \Rightarrow \bar{z} = a - ib$

2) $z = a + ib \Rightarrow z\bar{z} = a^2 + b^2$

3) z est réel $\Leftrightarrow \bar{z} = z$

4) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \bar{z} = -z$

5) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$

6) $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$

7) $\overline{\bar{z}} = z$

8) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

9) $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$

10) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in \mathbb{Z}$

11) $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\bar{z}_1}, \quad z_1 \neq 0$

12) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$

Module d'un nombre complexe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et z, z_1, z_2 des nombres complexes.

1) $ z = \sqrt{z\bar{z}}$	7) $\left \frac{1}{z}\right = \frac{1}{ z }, \quad z \neq 0$
2) $z = a + ib \Rightarrow z = \sqrt{a^2 + b^2}$	8) $\left \frac{z_1}{z_2}\right = \frac{ z_1 }{ z_2 }, \quad z_2 \neq 0$
3) $ z = 0 \Leftrightarrow z = 0$	9) $ z_1 + z_2 \leq z_1 + z_2 $
4) $ \bar{z} = -z = z $	(L'inégalité triangulaire)
5) $ z_1 z_2 = z_1 z_2 $	10) $AB = z_B - z_A $
6) $ z^n = z ^n, \quad n \in \mathbb{Z}$	

Argument d'un nombre complexe

Soient z, z_1, z_2 des nombres complexes non nuls.

1) $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z} = -\arg z$	5) z est réel $\Leftrightarrow \arg z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
2) $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$	6) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg z = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$
3) $\arg z^n = n \arg z, \quad n \in \mathbb{Z}$	Soient A, B, C, D des points tels que $AB \neq 0, CD \neq 0$.
4) $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$	7) $\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi]$
	8) $\arg \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \quad [2\pi]$

Notation exponentielle e^{ix}

Soient x et y des réels.

1) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$	7) $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$
2) $\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$	8) $\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$
3) $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$	9) $(e^{ix})^n = e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$
4) $e^{i\pi} = -1$	10) $ e^{ix} = 1$
5) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$	11) Si $z = \lambda e^{ix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors
6) $e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$	$\begin{cases} \lambda > 0 \Rightarrow \arg z = x \\ \lambda < 0 \Rightarrow \arg z = \pi + x \end{cases}$

Formules d'Euler – Formule de Moivre

Formules d'Euler	Soit $x \in \mathbb{R}$ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
Formule de Moivre	Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$; $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

Les formules d'Euler permettent dans certains cas de transformer un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$ en une somme de cosinus et de sinus des multiples de x (linéarisation).

La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sous forme d'un polynôme en $\cos x$ et $\sin x$.

Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

1. Cas particulier : équation à coefficients réels

$az^2 + bz + c = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0$.

❖ Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$	deux solutions réelles distinctes	$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	une solution réelle double	$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	deux solutions complexes conjuguées :	$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{ \Delta }}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{ \Delta }}{2a}$

2. Equation à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$; $a \neq 0$.

❖ Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

❖ Les racines carrées du discriminant sont les nombres complexes $\delta = x + iy$ et $-\delta = -x - iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \Delta \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(\Delta) \\ 2xy = \operatorname{Im}(\Delta) \end{cases}$	Les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$: $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$
--	--

3. Somme et produit des solutions:

Somme : $s = z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$; **Produit:** $p = z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

1) Nature d'un triangle

Soit ABC un triangle. On pose $Z = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$

Nature du triangle ABC	Relation caractéristique
Equilatéral	$Z = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Rectangle en A	Z est un imaginaire pur
Rectangle isocèle en A	$Z = i$ ou $Z = -i$
Isocèle en A	$ Z = 1$

2) Alignement et orthogonalité

Soient A,B,C,D des points du plan.

Relation complexe	Interprétation géométrique
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est réel	A,B,C sont alignés($A \neq B, A \neq C$)
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est réel	Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, ($A \neq B; C \neq D$) (
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \pm i$	$AB = CD$ et $(AB) \perp (CD)$ où ($A \neq B, C \neq D$)
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur	$(AB) \perp (CD)$ où ($A \neq B, C \neq D$)
$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \lambda e^{i\theta}; \lambda \in \mathbb{R}_+^*$	$(\overline{AB}, \overline{CD}) = \theta [2\pi]$ et $CD = \lambda AB$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}$ est réel	A,B,C,D sont alignés ou cocycliques

3) Lieux géométriques simples

Le plan orienté est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Considérons un point variable M d'affixe z . Le point M' d'affixe z' . Les points A, B, Ω sont fixes et d'affixes respectives a, b, ω .

Relation complexe	Ensemble des points M
$ z - \omega = r, r > 0$	Cercle de centre Ω et de rayon r
$ z - a = z - b $	Médiatrice de $[AB]$
$\arg \frac{z - a}{z - b} = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$	Cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B
Le nombre $\frac{z - a}{z - b}$ est imaginaire pur	Cercle de diamètre $[AB]$ privé de B
$\arg \frac{z - a}{z - b} = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$	Demi-cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B
$\arg \frac{z - a}{z - b} = 0 \quad [\pi]$	Droite (AB) privée de A et B
Le nombre $\frac{z - a}{z - b}$ est réel	Droite (AB) privée de B
$\left \frac{z - a}{z - b} \right = k, k > 0; k \neq 1$	Cercle centré sur (AB) de diamètre $[IJ]$ tel que $I = \text{bar}\{(A, 1); (B, k)\}; J = \text{bar}\{(A, 1); (B, -k)\}$
$\arg \frac{z - a}{z - b} = \alpha \quad [\pi], \alpha \neq 0 \quad [\pi]$	Cercle passant par A et B privé de A et B
$\arg \frac{z - a}{z - b} = \alpha \quad [2\pi], \alpha \neq 0 \quad [\pi]$	Arc capable d'extrémités A et B exclues

II. QUESTIONNAIRES A CHOIX MULTIPLE

QCM 1

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

N°	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z , alors	$\bar{z} = \frac{1}{z}$	$\bar{z} = -z$	$\bar{z}z = i$	$\bar{z} = z$
2	Si $z = -1 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, alors la forme exponentielle de z est :	$e^{i\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$	$i\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$	$(-1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$
3	Si $z + z = 2 + 4i$, alors	$z = -3 + 4i$	$z = -3 - 4i$	$z = 4i$	$z = -4 + 3i$
4	Si $z = (1 - i)e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors	$\arg z = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$	$\arg z = \pi + \frac{\pi}{6}$	$\arg z = \frac{\pi}{6}$	$\arg z = -\frac{\pi}{12}$
5	Si $z = 4 + (1 - 5i)i$, alors la partie réelle de z est	9	8	4	-1
6	Si $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_2 = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$, alors le rapport $\frac{z_2}{z_1}$ est égal à	$\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$	$\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	$-1 - i$	$1 - i$

QCM 2

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.

Ecrire le numéro de chaque question et donner la réponse qui lui correspond.

	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	La forme algébrique de $\frac{2+5i}{3-2i}$ est	$2+5i$	$\frac{-4}{13} + \frac{19}{13}i$	$\frac{16}{13} + \frac{19}{13}i$	$\frac{6}{5} + 2i$
2	Le module de $\frac{(2-2i\sqrt{3})^2}{(1+i)(2i)^3}$ est	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{4}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}$
3	Si $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z , alors le nombre $z^3 e^{i\frac{\pi}{4}}$ est	réel positif	imaginaire pur	réel négatif	d'argument $\frac{\pi}{4}$
4	Si $\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors le triangle ABC est :	isocèle et non rectangle	équilatéral	rectangle et isocèle	rectangle et non isocèle
5	L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left \frac{z-1+2i}{2+3i} \right = \sqrt{13}$ est :	un cercle	la médiatrice d'un segment	une droite privée d'un point	un cercle privé de deux points
6	Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}^*$. La forme algébrique de $(e^{i\theta})^n$ est :	$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$	$\cos(\theta^n) + i\sin(\theta^n)$	$n\cos\theta + i\sin\theta$	$e^{in\theta}$

III. ENONCES DES EXERCICES CORRIGES

Exercice 1

Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres :

$$z_1 = (3+2i)(2-3i), \quad z_2 = \frac{1+5i}{5-i},$$

$$z_3 = 2-3i + \frac{2i+4}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$$

$$z_5 = \frac{3-5i}{5+i} + \frac{4-3i}{3+i}, \quad z_6 = \frac{2+5i}{4-i} + \frac{4+i}{2-5i},$$

$$z_7 = (1-2i)^3, \quad z_8 = \frac{2+3i}{3i} + \frac{5i}{3-2i}$$

Exercice 2

On pose $f(z) = (3-2i)z^2 + (5-i)z + 2+5i$

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$$f(i), \quad f(3+2i), \quad f(1+i), \quad f(5-i)$$

Exercice 3

On pose $f(z) = (5+i)z + (1+2i)\bar{z} + 4-3i$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z

Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$$f(5-i), \quad f(1+2i), \quad f(3+4i), \quad f(5+3i)$$

Exercice 4

Soit $f(z) = \frac{(1-2i)z + 2+3i}{(3-2i)z - 2-5i}$ où z est un nombre complexe.

1) Calculer et donner la forme algébrique de chacun des nombres :

$$f(5+i), \quad f(2i), \quad f(3+2i), \quad f(1-i)$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations

$$f(z) = 1, \quad f(z) = \frac{3}{2}.$$

Ecrire les solutions sous forme algébrique.

Exercice 5

Soit

$$Z_1 = (1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020}$$

$$Z_2 = (1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}$$

Montrer que Z_1 est réel et Z_2 imaginaire pur.

Exercice 6

Calculer le module de chacun des nombres complexes suivant:

$$z_1 = 4 - 3i, \quad z_2 = (3+i)(2+5i),$$

$$z_3 = \frac{2+4i}{2+3i}, \quad z_4 = (1+2i)(3-5i)(1-2i),$$

$$z_5 = \frac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4}$$

Exercice 7

Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants:

$$z_1 = 4 + 4i, \quad z_2 = 3 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$$

$$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \frac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$$

Exercice 8

En utilisant les résultats de l'exercice précédent, écrire chacun des nombres suivants sous forme trigonométrique et exponentielle.

$$z_1 = 4 + 4i, \quad z_2 = 3 + i\sqrt{3}, \quad z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}},$$

$$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3}), \quad z_5 = \frac{(3-i\sqrt{3})(4+4i)^3}{(3+i\sqrt{3})^4}.$$

Exercice 9

Soit $z_1 = 4 + 4i, z_2 = 3 + i\sqrt{3}, z_3 = \frac{z_1}{z_2}, z_4 = z_1 z_2$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_3 .

b) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$.

3.a) Donner les formes trigonométrique et algébrique de z_4 .

b) En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Exercice 10 (Bac)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1.a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_1: z^2 + 2z + 10 = 0$

On note z_1 et z_2 ses solutions avec $\text{Im} z_2 \leq 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_2: z^2 - 4z + 20 = 0$

On note z_3 et z_4 ses solutions avec $\text{Im} z_4 \leq 0$.

2) On considère les points A, B, K, L et E d'affixes respectives $z_A = z_1$, $z_B = z_2$, $z_K = z_3$, $z_L = z_4$ et $z_E = z_3 - 2i$.

a) Placer les points A, B, K, L, et E dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Ecrire $z_E = z_3 - 2i$ sous forme algébrique et trigonométrique.

c) Déterminer la nature du quadrilatère ABLE et du triangle AKE.

3) Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq -1 + 3i$ on pose : $f(z) = \frac{z - 2 - 4i}{z + 1 - 3i}$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$.

Γ_2 tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$.

Exercice 11

1. On pose $P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$ où z est un nombre complexe.

a) Calculer $P(1)$.

b) Déterminer a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$ on a : $P(z) = (z - 1)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $P(z) = 0$.

2. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + 2i$ et $z_3 = 2 - 2i$.

a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres z_1 , z_2 et z_3 .

b) Placer les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

3.a) Ecrire le nombre $\frac{z_2}{z_3}$ sous forme algébrique. En déduire la nature du triangle OBC.

b) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left| \frac{z-1}{z-2-2i} \right| = 1$.

Exercice 12 (Bac)

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

a) Calculer $P(3)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a : $P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i$, $z_B = -1 + i$, $z_C = -1 - i$ et $z_D = 3$.

a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Comparer l'affixe du milieu de $[AC]$ à celle du milieu de $[BD]$.

c) En déduire la nature du quadrilatère ABCD.

d) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-3| = |z+1-i|$.

Exercice 13

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, chacune des équations suivantes : $z^2 - 4z + 13 = 0$ (E_1) $z^2 - 6z + 13 = 0$ (E_2)

2. Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 3 - 2i$ on pose : $f(z) = \frac{z - 2 - 3i}{z - 3 + 2i}$

Calculer $\alpha = f(7 + 4i)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique.

3. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 3i$, $z_B = 3 - 2i$ et $z_C = 5 + i$.

a) Placer dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A , B et C .

b) Calculer $f(z_C)$ puis donner son écriture algébrique et trigonométrique. En déduire la nature du triangle ABC .

c) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.

d) Déterminer puis construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur.

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante sachant qu'elle admet une racine réelle :

$$z^3 - (6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0$$

Exercice 15 (Bac)

Dans $\mathbb{C}$ on donne : $a = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{2}}$

1) Calculer a^2 . Donner le module et un argument de a^2 .

2) En déduire le module et un argument de a .

3) En déduire $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$.

4) Donner les entiers naturels n tels que a^n soit réel.

Exercice 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On pose :

$$P(z) = z^3 - (11 + 6i)z^2 + (28 + 38i)z - 12 - 60i \text{ où } z \text{ est un nombre complexe.}$$

1) Calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - 3)(z^2 + az + b).$$

2) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 17

Pour tout nombre complexe z on pose :

$$P(z) = z^3 - (1 + 2\cos \theta)z^2 + (1 + 2\cos \theta)z - 1 \text{ où } \theta \in [0; 2\pi[.$$

Calculer $P(1)$ puis déterminer les solutions z_0 , z_1 et z_2 de l'équation $P(z) = 0$ sachant que z_0 est réel, et $\operatorname{Im} z_1 \geq 0$ si $\sin \theta \geq 0$.

Exercice 18

Dans le plan orienté, on considère deux triangles ABC et DEF équilatéraux directs. Les points G et H tels que $EDBG$ et $CDFH$ soient des parallélogrammes. Soient a, b, c, d, e, f, g et h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H .

1) Exprimer $c - a$ en fonction de $b - a$, puis $f - d$ en fonction de $e - d$.

2) Exprimer g en fonction de b, d et e ; puis h en fonction de c, d et f .

3) Démontrer que le triangle AGH est équilatéral.

IV. CORRIGES DES EXERCICES

Corrigé 1

$$\begin{aligned}z_1 &= (3+2i)(2-3i) \\&= 6-9i+4i+6i^2 \\&= 6-9i+4i-6 \\&= 12-5i.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_2 &= \frac{1+5i}{5-i} \\&= \frac{(1+5i)(5+i)}{(5-i)(5+i)}\end{aligned}$$

$$z_2 = \frac{5+i+25i-5}{25+1} = \frac{26i}{26} = i.$$

$$\begin{aligned}z_3 &= 2-3i + \frac{2i+4}{2+3i} = \frac{(2-3i)(2+3i)+2i+4}{2+3i} \\&= \frac{4+9+2i+4}{2+3i} = \frac{17+2i}{2+3i}\end{aligned}$$

$$= \frac{(17+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{34-51i+4i+6}{4+9}$$

$$z_3 = \frac{40}{13} - \frac{47}{13}i.$$

$$\begin{aligned}z_4 &= (1+2i)(3-5i)(1-2i) = (1+2i)(1-2i)(3-5i) \\&= 5(3-5i)\end{aligned}$$

$$z_4 = 15-25i.$$

$$\begin{aligned}z_5 &= \frac{3-5i}{5+i} + \frac{4-3i}{3+i} = \frac{(3-5i)(3+i) + (5+i)(4-3i)}{(5+i)(3+i)} \\&= \frac{9+3i-15i+5+20-15i+4i+3}{15+5i+3i-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_5 &= \frac{37-23i}{14+8i} = \frac{(37-23i)(14-8i)}{(14+8i)(14-8i)} \\&= \frac{334-618i}{196+64}\end{aligned}$$

$$z_5 = \frac{334}{260} - \frac{618}{260}i.$$

$$z_6 = \frac{2+5i}{4-i} + \frac{4+i}{2-5i} = \frac{(2+5i)(2-5i) + (4-i)(4+i)}{(4-i)(2-5i)}$$

$$= \frac{4+25+16+1}{8-20i-2i-5} = \frac{46}{3-22i} \times \frac{3+22i}{3+22i}$$

$$z_6 = \frac{138+1012i}{9+484} = \frac{138}{493} + \frac{1012}{493}i.$$

$$z_7 = (1-2i)^3 = (1-2i)(1-2i)^2 = (1-2i)(1-4i-4)$$

$$= (1-2i)(-3-4i) = -3-4i+6i-8$$

$$z_7 = -11+2i.$$

$$z_8 = \frac{2+3i}{3i} + \frac{5i}{3-2i} = \frac{(2+3i)(3-2i) + (3i)(5i)}{3i(3-2i)}$$

$$= \frac{6-4i+9i+6-15}{9i+6} = \frac{-3+5i}{6+9i} \times \frac{6-9i}{6-9i}$$

$$= \frac{-18+27i+30i+45}{36+81}$$

$$= \frac{27+57i}{117}$$

$$z_8 = \frac{27}{117} + \frac{57}{117}i.$$

Enfin $z_8 = \frac{3}{13} + \frac{19}{39}i$

Corrigé 2

On a : $f(z) = (3-2i)z^2 + (5-i)z + 2+5i$

$$f(i) = (3-2i)(i)^2 + (5-i)i + 2+5i$$

$$= -3+2i+5i+1+2+5i$$

$$= 12i.$$

$$f(3+2i) = (3-2i)(3+2i)^2 + (5-i)(3+2i) + 2+5i$$

$$= (9+4)(3+2i) + 15+10i-3i+2+2+5i$$

$$= 13(3+2i) + 19+12i$$

$$= 39+26i+19+12i$$

$$= 58+38i.$$

$$\begin{aligned}
 f(1+i) &= (3-2i)(1+i)^2 + (5-i)(1+i) + 2+5i \\
 &= (3-2i)(2i) + 5+5i-i+1+2+5i \\
 &= 6i+4+8+9i \\
 &= 12+15i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(5-i) &= (3-2i)(5-i)^2 + (5-i)^2 + 2+5i \\
 &= (3-2i)(25-10i-1) + (25-10i-1) + 2+5i \\
 &= (3-2i)(24-10i) + 26-5i \\
 &= 72-30i-48i-20+26-5i \\
 &= 78-83i.
 \end{aligned}$$

Corrigé 3

On a $f(z) = (5+i)z + (1+2i)\bar{z} + 4-3i$

On remplace z par sa valeur dans chaque cas :

$$\begin{aligned}
 f(5-i) &= (5+i)(5-i) + (1+2i)\overline{(5-i)} + 4-3i \\
 &= 25+1 + (1+2i)(5+i) + 4-3i \\
 &= 30+5+i+10i-2-3i \\
 &= 33+8i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(1+2i) &= (5+i)(1+2i) + (1+2i)\overline{(1+2i)} + 4-3i \\
 &= 5+10i+i-2+1+4+4-3i \\
 &= 12+8i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(3+4i) &= (5+i)(3+4i) + (1+2i)\overline{(3+4i)} + 4-3i \\
 &= 15+20i+3i-4 + (1+2i)(3-4i) + 4-3i \\
 &= 15+20i+3-4i+6i+8 \\
 &= 26+22i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(5+3i) &= (5+i)(5+3i) + (1+2i)\overline{(5+3i)} + 4-3i \\
 &= 25+15i+5i-3 + (1+2i)(5-3i) + 4-3i \\
 &= 26+17i+5-3i+10i+6 \\
 &= 37+24i.
 \end{aligned}$$

Corrigé 4

On a

$$\begin{aligned}
 f(5+i) &= \frac{(1-2i)(5+i) + 2+3i}{(3-2i)(5+i) - 2-5i} \\
 &= \frac{5+i-10i+2+2+3i}{15+3i-10i+2-2-5i}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{9-6i}{15-12i} = \frac{9-6i}{15-12i} \times \frac{15+12i}{15+12i}$$

$$= \frac{135+108i-90i+72}{225+144}$$

$$= \frac{207+18i}{369} = \frac{207}{369} + \frac{18}{369}i$$

$$f(5+i) = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$$

$$f(2i) = \frac{(1-2i)(2i)+2+3i}{(3-2i)(2i)-2-5i} = \frac{2i+4+2+3i}{6i+4-2-5i}$$

$$= \frac{6+5i}{2+i} = \frac{6+5i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$$

$$= \frac{12-6i+10i+5}{4+1}$$

$$= \frac{17+4i}{5} = \frac{17}{5} + \frac{4}{5}i$$

$$f(3+2i) = \frac{(1-2i)(3+2i)+2+3i}{(3-2i)(3+2i)-2-5i}$$

$$= \frac{3+2i-6i+4+2+3i}{9+4-2-5i}$$

$$= \frac{9-i}{11-5i} \times \frac{11+5i}{11+5i} = \frac{99+45i-11i+5}{121+25}$$

$$= \frac{104+34i}{146} = \frac{104}{146} + \frac{34}{146}i$$

$$= \frac{52}{73} + \frac{17}{73}i$$

$$f(1-i) = \frac{(1-2i)(1-i)+2+3i}{(3-2i)(1-i)-2-5i}$$

$$= \frac{1-i-2i-2+2+3i}{3-3i-2i-2-2-5i}$$

$$= \frac{1}{-1-10i} \times \frac{-1+10i}{-1+10i} = \frac{-1+10i}{1+100}$$

$$= \frac{-1+10i}{101}$$

$$= \frac{-1}{101} + \frac{10}{101}i$$

$$\begin{aligned}
 f(z) = 1 &\Rightarrow \frac{(1-2i)z + 2 + 3i}{(3-2i)z - 2 - 5i} = 1 \\
 &\Rightarrow (1-2i)z + 2 + 3i = (3-2i)z - 2 - 5i \\
 &\Rightarrow [(1-2i) - (3-2i)]z = -2 - 5i - 2 - 3i \\
 &\Rightarrow -2z = -4 - 8i \\
 &\Rightarrow z = 2 + 4i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(z) = \frac{3}{2} &\Rightarrow \frac{(1-2i)z + 2 + 3i}{(3-2i)z - 2 - 5i} = \frac{3}{2} \\
 &\Rightarrow 2((1-2i)z + 2 + 3i) = 3((3-2i)z - 2 - 5i) \\
 &\Rightarrow (2-4i)z + 4 + 6i = (9-6i)z - 6 - 15i \\
 &\Rightarrow [(2-4i) - (9-6i)]z = -6 - 15i - 4 - 6i \\
 &\Rightarrow (-7+2i)z = -10 - 21i \\
 &\Rightarrow z = \frac{-10 - 21i}{-7 + 2i} \\
 &\Rightarrow z = \frac{-10 - 21i}{-7 + 2i} \times \frac{-7 - 2i}{-7 - 2i} \\
 &\Rightarrow z = \frac{70 + 20i + 147i - 42}{49 + 4} \\
 &\Rightarrow z = \frac{28 + 167i}{53} \\
 &\Rightarrow z = \frac{28}{53} + \frac{167i}{53}.
 \end{aligned}$$

Corrigé 5

Pour montrer que Z_1 est réel, il suffit de montrer que $\overline{Z_1} = Z_1$.

On a

$$\begin{aligned}
 \overline{Z_1} &= \overline{(1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020}} \\
 &= \overline{(1+5i)^{2020}} + \overline{(1-5i)^{2020}} \\
 &= (\overline{1+5i})^{2020} + (\overline{1-5i})^{2020} \\
 &= (1-5i)^{2020} + (1+5i)^{2020} \\
 &= (1+5i)^{2020} + (1-5i)^{2020} \\
 &= Z_1
 \end{aligned}$$

Alors Z_1 est réel.

Pour montrer que Z_2 est imaginaire pur, il suffit de montrer que $\overline{Z_2} = -Z_2$.

$$\begin{aligned}
\overline{Z_2} &= \overline{(1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}} \\
&= \overline{(1+5i)^{2020}} - \overline{(1-5i)^{2020}} \\
&= \overline{(1+5i)}^{2020} - \overline{(1-5i)}^{2020} \\
&= (1-5i)^{2020} - (1+5i)^{2020} \\
&= -((1+5i)^{2020} - (1-5i)^{2020}) \\
&= -Z_2
\end{aligned}$$

Alors Z_2 est imaginaire pur.

Corrigé 6

On utilise les propriétés des modules :

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5,$$

$$|z_2| = |3+i||2+5i| = \sqrt{9+1} \times \sqrt{4+25} = \sqrt{290},$$

$$|z_3| = \left| \frac{2+4i}{2+3i} \right| = \frac{|2+4i|}{|2+3i|} = \frac{\sqrt{4+16}}{\sqrt{4+9}} = \sqrt{\frac{20}{13}},$$

$$\begin{aligned}
|z_4| &= |(1+2i)(3-5i)(1-2i)| = |1+2i||3-5i||1-2i| \\
&= \sqrt{1+4} \times \sqrt{9+25} \times \sqrt{1+4} = 5\sqrt{34},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|z_5| &= \left| \frac{(3-5i)(5+2i)^3}{(2+5i)^4} \right| = \frac{|(3-5i)||5+2i|^3}{|(2+5i)^4|} \\
&= \frac{\sqrt{9+25} \times (\sqrt{25+4})^3}{(\sqrt{4+25})^4} = \sqrt{\frac{34}{29}}.
\end{aligned}$$

Corrigé 7

1) On a

$$z_1 = 4+4i \Rightarrow |z_1| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

On note $\arg z_1 = \theta_1$. Alors :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta_1 = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}$$

2) On a $z_2 = 3+i\sqrt{3} \Rightarrow |z_2| = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

On note $\arg z_2 = \theta_2$. Alors :

$$\begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

3) On constate que $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

Alors $|z_3| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

et $\arg z_3 = \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$

4) On constate que $z_4 = z_1 z_2$.

Alors $|z_4| = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2| = 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$,

$\arg z_4 = \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$

5) On constate que $z_5 = \frac{\overline{z_2} z_1^3}{z_2^4}$. Alors

$$|z_5| = \left| \frac{\overline{z_2} z_1^3}{z_2^4} \right| = \frac{|\overline{z_2}| |z_1|^3}{|z_2|^4} = \frac{|z_2| |z_1|^3}{|z_2|^4} = \frac{2\sqrt{3}(4\sqrt{2})^3}{(2\sqrt{3})^4} |z_5| = \frac{16}{3} \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} \arg z_5 &= \arg \frac{\overline{z_2} z_1^3}{z_2^4} = \arg \overline{z_2} z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= \arg \overline{z_2} + \arg z_1^3 - \arg z_2^4 \\ &= -\arg z_2 + 3 \arg z_1 - 4 \arg z_2 \end{aligned}$$

$\arg z_5 = 3 \arg z_1 - 5 \arg z_2 = \frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{6} \dots$ Alors $\arg z_5 = \frac{-\pi}{12}$.

Corrigé 8

D'après l'exercice précédent :

1) $|z_1| = 4\sqrt{2}$ et $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$

Forme trigonométrique : $z_1 = 4\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

ou $z_1 = 4\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}})$

Forme exponentielle : $z_1 = 4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2) $|z_2| = 2\sqrt{3}$ et $\arg z_2 = \frac{\pi}{6}$;

Forme trigonométrique : $z_2 = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$

Ou $z_2 = 2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$.

Forme exponentielle : $z_2 = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3) $|z_3| = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ et $\arg z_3 = \frac{\pi}{12}$;

Forme trigonométrique : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

4) $|z_4| = 8\sqrt{6}$ et $\arg z_4 = \frac{5\pi}{12}$;

Forme trigonométrique : $z_4 = 8\sqrt{6}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_4 = 8\sqrt{6}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

5) $|z_5| = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ et $\arg z_5 = \frac{-\pi}{12}$;

Forme trigonométrique : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}(\cos \frac{-\pi}{12} + i \sin \frac{-\pi}{12})$.

Forme exponentielle : $z_5 = \frac{16\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

Corrigé 9

1) **Forme trigonométrique de z_1 et z_2 :**

D'après l'exercice précédent on a :

$$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}), \text{ et } z_2 = 2\sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

2.a) **Forme trigonométrique de z_3 :**

D'après l'exercice précédent on a : $z_3 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12})$ (*)

Pour écrire z_3 sous la forme algébrique, on multiplie par le conjugué du dénominateur :

$$z_3 = \frac{4+4i}{3+i\sqrt{3}} \times \frac{3-i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}$$

On obtient : $z_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} + \frac{3-\sqrt{3}}{3}i$ (**)

b) Par comparaison des écritures (*) et (**) du nombre z_3 on obtient :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3+\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}+3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}-3}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

3.a) D'après l'exercice précédent on a :

$$z_4 = 8\sqrt{6}(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12})$$
 (*)

Pour la forme algébrique de z_4 , on développe :

$$z_4 = (4+4i)(3+i\sqrt{3})$$

$$z_4 = 12-4\sqrt{3} + (12+4\sqrt{3})i$$
 (**)

b) Par comparaison des écritures (*) et (**) du nombre z_4 on obtient :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{12-4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{12+4\sqrt{3}}{8\sqrt{6}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Corrigé 10

1) Résolutions d'équations:

a) $E_1 \quad z^2 + 2z + 10 = 0$

Le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 10 = -36 = (6i)^2$

Les solutions z_1 et z_2 avec $\text{Im} z_2 \leq 0$:

$$AK = |z_K - z_A| = |2 + 4i + 1 - 3i| = |3 + i| = \sqrt{10}$$

$$AE = |z_E - z_A| = |2 + 2i + 1 - 3i| = |3 - i| = \sqrt{10}$$

AK=AE. Alors le triangle AKE est isocèle en A.

3.a) L'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)|=1$:

On a $f(z) = \frac{z-2-4i}{z+1-3i}$. On constate que $f(z) = \frac{z-z_K}{z-z_A}$.

Alors : $|f(z)|=1 \Leftrightarrow \left| \frac{z-z_K}{z-z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow |z-z_K| = |z-z_A| \Leftrightarrow MK = MA$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment $[AK]$.

Pour la construction, voir la figure.

b) L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)-1|=\sqrt{10}$:

On a $|f(z)-1|=\sqrt{10} \Leftrightarrow \left| \frac{z-2-4i}{z+1-3i} - 1 \right| = \sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z-2-4i-z-1+3i}{z+1-3i} \right| = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{-3-i}{z+1-3i} \right| = \sqrt{10} \Leftrightarrow \frac{|-3-i|}{|z+1-3i|} = \sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{|z-z_A|} = \sqrt{10} \quad \Leftrightarrow |z-z_A|=1 \quad \Leftrightarrow AM=1$$

Alors Γ_2 est le cercle de centre A et de rayon 1.

Pour la construction, voir la figure.

Corrigé 11

On a pour tout nombre complexe z : $P(z) = z^3 - 5z^2 + 12z - 8$

1. a) En remplaçant z par 1 on obtient :

$$P(1) = (1)^3 - 5(1) + 12(1) - 8 = -4 + 4 = 0$$

b) 1^{ère} méthode : identification

Pour déterminer a et b tels que : $P(z) = (z-1)(z^2 + az + b)$, on utilise une identification (Développer, réduire, ordonner le second membre et identifier) :

$$(z-1)(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - z^2 - az - b$$

$$= z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$$

Par identification :

$z^3 - 5z^2 + 12z - 8 = z^3 + (a-1)z^2 + (b-a)z - b$, pour tout $z \in \mathbb{C}$; on obtient le

$$\text{systeme : } \begin{cases} a-1 = -5 \\ b-a = 12 \\ -b = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 8 \end{cases}$$

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

2^{ème} méthode : Division euclidienne

$z^3 - 5z^2 + 12z - 8$	$z - 1$
$z^3 - z^2$	$z^2 - 4z + 8$
$-4z^2 + 12z - 8$	
$-4z^2 + 4z$	
$8z - 8$	
$8z - 8$	
0	

On en déduit que, pour tout $z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

soit $a = -4$ et $b = 8$.

3^{ème} méthode : Tableau d'Horner

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer $P(1)$ et factoriser $P(z)$, (si $P(1) = 0$) :

	1	-5	12	-8
1		1	-4	8
	1	-4	8	0

D'où : $a = -4$, $b = 8$, $P(1) = 0$ et $P(z) = (z-1)(z^2 - 4z + 8)$

c) L'équation $P(z) = 0$ équivaut $z-1=0$ ou $z^2 - 4z + 8 = 0$.

* Si $z-1=0$ on obtient la solution $z_1 = 1$

* Si $z^2 - 4z + 8 = 0$, on a $\Delta = 16 - 32 = -16 = (4i)^2$

Les solutions de cette équation sont : $z_2 = \frac{4+4i}{2} = 2+2i$; $z_3 = \frac{4-4i}{2} = 2-2i$

(Ces solutions sont conjuguées car les coefficients sont réels et le discriminant est négatif).

L'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est : $S = \{1; 2+2i; 2-2i\}$

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Les points A, B et C sont d'affixes : $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$.

a) Calcul de modules arguments :

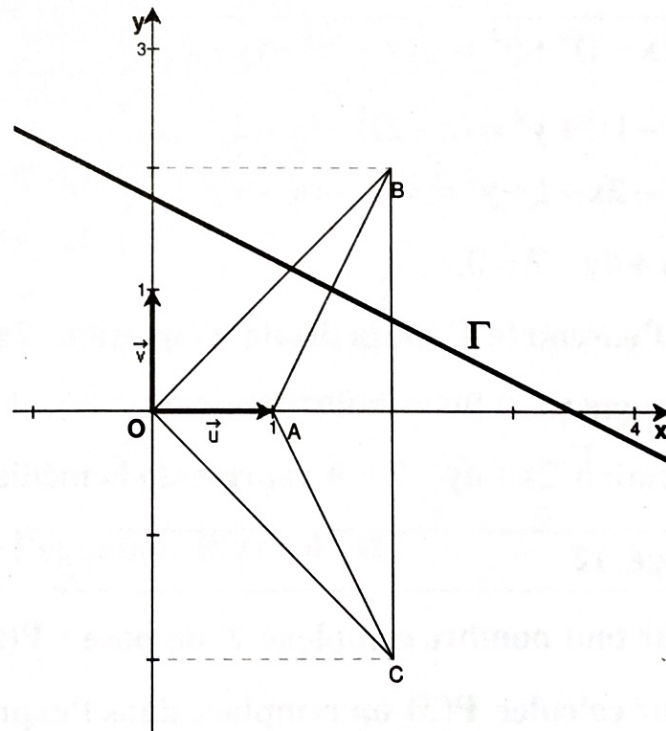
$$|z_1| = |1| = 1, \arg z_1 = 0 [2\pi]$$

$$|z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}, \arg z_2 = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$|z_3| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}, \arg z_3 = \frac{-\pi}{4} [2\pi]$$

b) Représentation des points :

Les points A, B et C ont pour affixes Les points $z_A = 1$, $z_B = 2+2i$ et $z_C = 2-2i$. Alors A(1;0), B(2;2) et C(2;-2).



3.a) On a :

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_3} &= \frac{2+2i}{2-2i} \\ &= \frac{1+i}{1-i} \\ &= \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{z_2}{z_3} = \frac{z_B - z_O}{z_C - z_O}$. Alors $\frac{z_B - z_O}{z_C - z_O} = i$, d'où le triangle OBC est rectangle isocèle en O.

b) Pour déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que $\left| \frac{z-1}{z-2-2i} \right| = 1$, on constate que cette égalité peut s'écrire : $\left| \frac{z-z_A}{z-z_B} \right| = 1$

$$\text{Alors } M \in \Gamma \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

D'où l'ensemble Γ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Méthode 2 : Equation de Γ

On pose $z = x + iy$;

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow \left| \frac{z-1}{z-2-2i} \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow |z-1| = |z-2-2i|$$

$$\Leftrightarrow |x-1+iy| = |x-2+(y-2)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4$$

$$\Leftrightarrow 2x + 4y - 7 = 0$$

D'où l'ensemble Γ est la droite d'équation $2x + 4y - 7 = 0$.

Remarque :

L'équation $2x + 4y - 7 = 0$ représente la médiatrice du segment $[AB]$.

Corrigé 12

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - z^2 - 4z - 6$.

a) Pour calculer $P(3)$ on remplace dans l'expression de $P(z)$:

$$P(3) = 3^3 - 3^2 - 4 \cdot 3 - 6 = 27 - 9 - 12 - 6 = 0$$

b) Pour déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a :

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$, on peut utiliser une identification ou une division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l}
 z^3 - z^2 - 4z - 6 & z - 3 \\
 \hline
 z^3 - 3z^2 & z^2 + 2z + 2 \\
 2z^2 - 4z - 6 & \\
 2z^2 - 6z & \\
 2z - 6 & \\
 2z - 6 & \\
 0 &
 \end{array}$$

On en déduit que $P(z) = (z - 3)(z^2 + 2z + 2)$, soit $a = 2$ et $b = 2$.

Remarque :

L'utilisation du tableau d'Horner permet à la fois de calculer $P(3)$ et factoriser $P(z)$, (si $P(3) = 0$) :

	1	-1	-4	-6
3		3	6	6
	1	2	2	0

D'où : $a = 2$, $b = 2$, $P(3) = 0$ et $P(z) = (z - 3)(z^2 + 2z + 2)$

c) Pour résoudre l'équation $P(z) = 0$:

soit $z - 3 = 0$, d'où $z_0 = 3$.

soit $z^2 + 2z + 2 = 0$, d'où $\Delta = -4 = (2i)^2$, et les solutions sont : $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = -1 + i$.

Alors l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est :

$$S = \{3, -1 + i, -1 - i\}$$

2. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$,

a) Pour placer les points A , B , C et D on a :

$$z_A = 3 + 2i \Rightarrow A(3, 2)$$

$$z_B = -1 + i \Rightarrow B(-1, 1)$$

$$z_C = -1 - i \Rightarrow C(-1, -1)$$

$$z_D = 3 \Rightarrow D(3, 0)$$

b) L'affixe du milieu de $[AC]$ est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{z_A + z_C}{2} &= \frac{3 + 2i - 1 - i}{2} \\ &= \frac{2 + i}{2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

L'affixe du milieu de $[BD]$ est égale à :

$$\frac{z_B + z_D}{2} = \frac{-1 + i + 3}{2} = \frac{2 + i}{2} = 1 + \frac{1}{2}i$$

On constate que les milieux des segments $[AC]$ et $[BD]$ ont la même affixe.

c) D'après le résultat précédent on déduit que les segments $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Donc le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

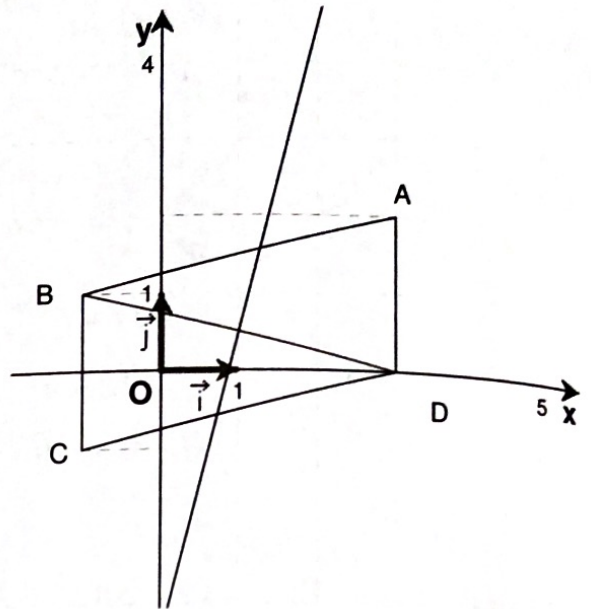
d) Soit Γ l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 3| = |z + 1 - i|$.

Alors
$$M \in \Gamma \Leftrightarrow |z_M - z_D| = |z_M - z_B|$$

$M \in \Gamma \Leftrightarrow MD = MB$. Alors Γ est la médiatrice du segment $[BD]$.

Remarque :

En utilisant la forme algébrique $z = x + iy$ on trouve que Γ est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que: $|x - 3 + iy| = |x + 1 + (y - 1)i|$



Après le calcul des modules et la simplification on obtient une équation cartésienne de Γ : $8x - 2y - 7 = 0$. C'est l'équation d'une droite qu'on peut représenter facilement. On peut vérifier que c'est la médiatrice du segment $[BD]$.

Corrigé 13

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Résolutions d'équations:

$$z^2 - 4z + 13 = 0 \quad (E1)$$

Le discriminant: $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36 = (6i)^2$

Les solutions: $z_1 = \frac{4+6i}{2} = 2+3i$ et $z_2 = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$

$$z^2 - 6z + 13 = 0 \quad (E2)$$

Le discriminant: $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -16 = (4i)^2$

Les solutions: $z_1 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$ et $z_2 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i$

2. On a :
$$f(z) = \frac{z-2-3i}{z-3+2i}$$

$$\alpha = f(7+4i)$$

$$\alpha = \frac{7+4i-2-3i}{7+4i-3+2i}$$

$$\alpha = \frac{5+i}{4+6i}$$

Pour l'écriture algébrique, on multiplie par le conjugué du numérateur :

$$\alpha = \frac{5+i}{4+6i} \times \frac{4-6i}{4-6i} = \frac{20-30i+4i+6}{4^2+6^2} = \frac{26-26i}{52}$$

$$\alpha = \frac{26(1-i)}{26 \cdot 2} = \frac{1-i}{2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

Pour la forme trigonométrique, on a:

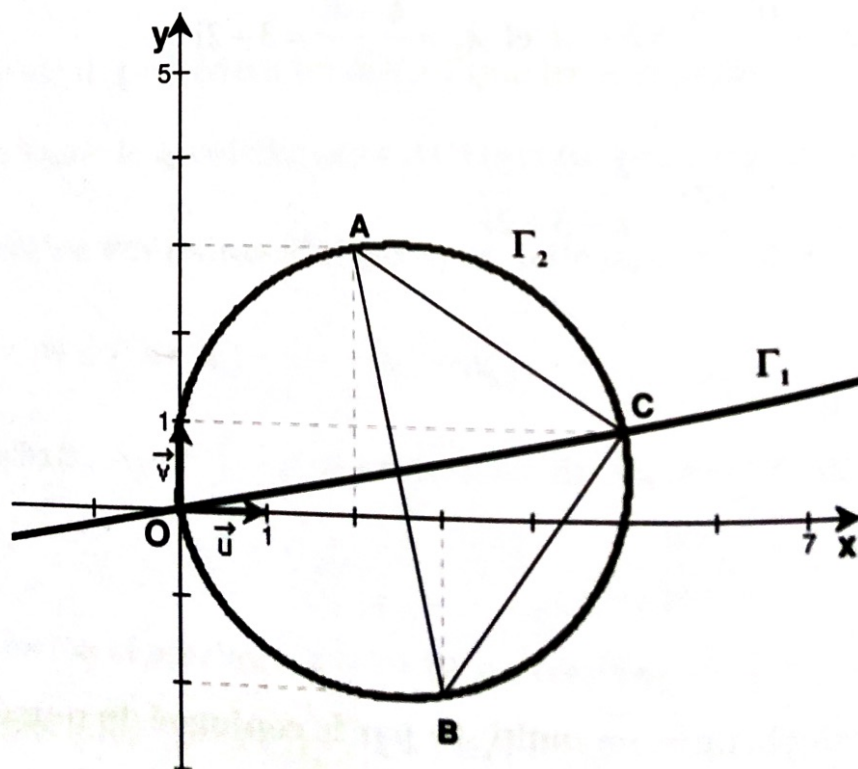
$$|\alpha| = \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$$

3. On a : $z_A = 2+3i$, $z_B = 3-2i$ et $z_C = 5+i$.

a) Représentation des points A, B et C.



b) Calcul de $f(z_C)$:

$$f(z_C) = \frac{5+i-2-3i}{5+i-3+2i} = \frac{3-2i}{2+3i} = \frac{-3i^2-2i}{2+3i} = \frac{-i(3i+2)}{2+3i} = -i$$

Forme algébrique : $f(z_C) = -i$

Forme trigonométrique: $f(z_C) = 1(\cos \frac{-\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi}{2})$

Pour la nature du triangle ABC, on constate que : $f(z_C) = \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B}$

Alors $\frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. D'où le triangle ABC est rectangle isocèle en C.

c) L'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$:

On constate que $f(z) = \frac{z - z_A}{z - z_B}$.

$$\text{Alors : } |f(z)| = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_A}{z - z_B} \right| = 1 \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow MA = MB$$

D'où l'ensemble Γ_1 est la médiatrice du segment $[AB]$.

Pour la construction, voir la figure.

d) L'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tels que le nombre $f(z)$ soit imaginaire pur :

On a : $f(z)$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \frac{z - z_A}{z - z_B}$ est imaginaire pur

Alors Γ_2 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.

Pour la construction, voir la figure.

Corrigé 14

- Soit $z_0 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ la solution réelle de l'équation

$$E : z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i) = 0$$

$$\text{Alors : } \alpha^3 - (6+3i)\alpha^2 + (21+19i)\alpha - 26(1+i) = 0$$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 - 3i\alpha^2 + 21\alpha + 19i\alpha - 26 - 26i = 0$$

$$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 + (-3\alpha^2 + 19\alpha - 26)i = 0$$

- On résout le système :

$$\begin{cases} \alpha^3 - 6\alpha^2 + 21\alpha - 26 = 0 & (1) \\ -3\alpha^2 + 19\alpha - 26 = 0 & (2) \end{cases}$$

D'après (2) On trouve : $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = \frac{13}{3}$.

En remplaçant dans (1) on trouve que $\alpha_1 = 2$ vérifie (1) et $\alpha_2 = \frac{13}{3}$ ne vérifie pas (1) Alors $z_0 = 2$

- On pose $P(z) = z^3 - (6+3i)z^2 + (21+19i)z - 26(1+i)$

On factorise par $(z-2)$,

	1	-6-3i	21+19i	-26-26i
2		2	-8-6i	26+26i
	1	-4-3i	13+13i	0

$$\text{Alors : } P(z) = (z-2)(z^2 + (-4-3i)z + 13+13i)$$

- Résolvons l'équation : $z^2 - (4+3i)z + 13+13i = 0$

$$\Delta = (4+3i)^2 - 52 - 52i = -45 - 28i.$$

Par le calcul on obtient une racine carrée $\delta = 2 - 7i$.

Les racines de l'équation du second degré :

$$z_1 = \frac{4+3i+2-7i}{2} = 3-2i; \quad z_2 = \frac{4+3i-2+7i}{2} = 1+5i$$

- Ensemble de solution : $S = \{2, 3-2i, 1+5i\}$

Corrigé 15

1) On a : $a^2 = \left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} \right)^2$

$$a^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \frac{2+\sqrt{3}}{2} \quad a^2 = \frac{-2\sqrt{3}}{2} + 2i\sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow a^2 = -\sqrt{3} + i$$

- **Module :** $|a^2| = |-\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} \Rightarrow |a^2| = 2$

- **Argument :** Soit θ un réel tel que $\arg a^2 = \theta$

Alors : $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \arg a^2 = \frac{5\pi}{6}$.

2.a) **Module et argument de a :**

- **Module :** $|a^2| = 2 \Rightarrow |a| = \sqrt{2}$

- **Argument :** $\arg a^2 = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow 2\arg a = \frac{5\pi}{6}$

$$\arg a = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in \{0, 1\}$$

Soit $k = 0 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12}$

Soit $k = 1 \Rightarrow \arg a = \frac{5\pi}{12} + \pi = \frac{17\pi}{12}$.

Comme $\operatorname{Re}(a) > 0$ et $\operatorname{Im}(a) > 0$, $\arg a \neq \frac{17\pi}{12}$. Enfin, $\arg a = \frac{5\pi}{12}$.

3) D'après ce qui précède, on déduit que :

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

4) Le nombre a^n est réel si et seulement si $\arg a^n = k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow \frac{5n\pi}{12} = k\pi \Leftrightarrow 5n = 12k \Leftrightarrow n = \frac{12k}{5}$$

n est un entier naturel et le nombre 12 n'est pas divisible par 5, donc k est divisible par 5. On prend $k = 5k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$.

$$\arg a^n = k\pi \Leftrightarrow n = 12 \times \frac{k}{5} \Leftrightarrow n = 12k'$$

Alors, l'ensemble des valeurs de n tels que a^n soit réel c'est les multiples de 12.

Corrigé 16

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) On pose : $P(z) = z^3 - (11+6i)z^2 + (28+38i)z - 12-60i$ où z est un nombre complexe.

a) Pour calculer $P(3)$ et déterminer les nombres a et b tels que:

$P(z) = (z-3)(z^2 + az + b)$, on peut utiliser la division euclidienne, une identification ou le tableau d'Horner :

	1	-11-6i	28+38i	-12-60i
3	$\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}$	3	-24-18i	12+60i
	1	-8-6i	4+20i	0

Alors, $P(3) = 0$ et pour tout z de $\mathbb{C}$: $P(z) = (z-3)(z^2 + (-8-6i)z + 4+20i)$.

Donc $a = -8-6i$ et $b = 4+20i$.

b) L'équation $P(z) = 0$ équivaut à $z-3=0$ ou $z^2 + (-8-6i)z + 4+20i = 0$

On a $z-3=0 \Leftrightarrow z=3$.

Le discriminant de l'équation du second degré est

$$\Delta = (-8-6i)^2 - 4(4+20i) = 64 - 36 + 96i - 16 - 80i$$

$$\Delta = 12 + 16i = (4+2i)^2. \quad \text{Donc } \delta = 4+2i.$$

$$\text{Les solutions sont : } z_1 = \frac{8+6i+4+2i}{2} = 6+4i \text{ et } z_2 = \frac{8+6i-4-2i}{2} = 2+2i.$$

Conclusion : L'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ est $S = \{3, 6+4i, 2+2i\}$.

Corrigé 17

Pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = z^3 - (1 + 2\cos \theta)z^2 + (1 + 2\cos \theta)z - 1$
où $\theta \in [0; 2\pi[$.

1.a) Calcul de $P(1)$:

$$P(1) = 1 - (1 + 2\cos \theta) \times 1^2 + (1 + 2\cos \theta) \times 1 - 1 = 0$$

• Pour résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $P(z) = 0$, on factorise $P(z)$ et pour cela on peut utiliser la division euclidienne, une identification, ou bien le tableau d'Horner : 1 est une racine du polynôme P

	1	$-1 - 2\cos \theta$	$1 + 2\cos \theta$	-1
1		1	$-2\cos \theta$	1
	1	$-2\cos \theta$	1	0

Alors Pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - 1)(z^2 - 2\cos \theta z + 1)$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 1)(z^2 - 2\cos \theta z + 1) = 0$$

$$\text{soit } z - 1 = 0 \Rightarrow z_0 = 1 \in \mathbb{R}$$

$$\text{ou } z^2 - 2\cos \theta z + 1 = 0$$

Réolvons l'équation : $z^2 - 2\cos \theta z + 1 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta' &= (-\cos)^2 - 1 \times 1 \\ &= \cos^2 \theta - 1 \\ &= -(1 - \cos^2 \theta) \\ &= (i \sin \theta)^2 \end{aligned}$$

Donc

$$z' = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{1} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z'' = \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{1} = \cos \theta - i \sin \theta$$

Si $\sin \theta \geq 0$, $\text{Im}(z_1) \geq 0 \Rightarrow z_1 = z' = \cos \theta + i \sin \theta$ et $z_2 = \cos \theta - i \sin \theta$.

Donc l'ensemble de solutions de l'équation $P(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$ est :

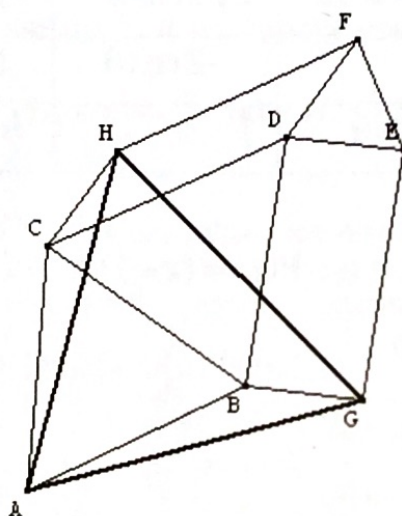
$$S = \{1; \cos \theta + i \sin \theta; \cos \theta - i \sin \theta\}.$$

1) ABC est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

DEF est équilatéral direct :

$$\Rightarrow \frac{f-d}{e-d} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow (f-d) = e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$



2) EDBG est un Parallélogramme

$$\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DE} \Rightarrow g-b = e-d \Rightarrow g = b+e-d$$

$$DCHF \text{ est un parallélogramme} \Rightarrow h-c = f-d \Rightarrow h = c+f-d$$

3) On calcule $\frac{h-a}{g-a}$

$$g-a = b-a+e-d, \quad h-a = c-a+f-d$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + e^{i\frac{\pi}{3}}(e-d)$$

$$h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a+e-d) \Rightarrow h-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$$

$$\frac{h-a}{g-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow AGH \text{ est équilatéral direct.}$$

V. EXERCICES DE SYNTHÈSE

Exercice 1

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (2-2i)z^2 + (2-4i)z - 4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z on a :
 $P(z) = (z-2i)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = -1-i$, $z_B = 2i$ et $z_C = -1+i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que :
 $|z+1-i| = 3$.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1+2i$ on pose : $f(z) = \frac{z-3-i}{z-1-2i}$.

1) Calculer le nombre $\alpha = f(1+3i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) On considère les deux points A et B d'affixes respectives $z_A = 1+2i$ et $z_B = 3+i$.

Déterminer et représenter dans le même repère les ensembles Γ_k des points M du plan d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) Γ_1 tel que $|f(z)| = 1$; b) Γ_2 tel que $f(z)$ soit imaginaire pur ;

c) Γ_3 tel que $f(z)$ soit réel ; d) Γ_4 tel que $|f(z)-1| = \sqrt{5}$.

3.a) Déterminer et représenter dans le repère précédent un point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en C (deux solutions possibles).

b) Vérifier que C est commun entre Γ_1 et Γ_2 .

Exercice 3

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ et $z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$.

1) Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.

2) Ecrire z_3 sous forme algébrique.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$.

4) Justifier les affirmations suivantes :

Le nombre $(z_1)^{2019}$ est réel.

Le nombre $(z_2)^{2019}$ est imaginaire pur.

Exercice 4

1) Pour tout nombre complexe z , on pose $P(z) = z^3 - (4 - i)z^2 + 7z - 4 + 7i$.

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-12 - 16i$.

b) Calculer $P(-i)$.

c) Déterminer les réels a et b tels que, $\forall z \in \mathbb{C}$, on a : $P(z) = (z + i)(z^2 + az + b)$.

d) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = -i$ et $z_C = 3 - 2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Soit D le point tel que ABCD soit un parallélogramme. Justifier que $z_D = 4 + i$

c) Ecrire sous forme algébrique $\frac{z_D - z_C}{z_D - z_A}$ et en déduire la nature du triangle ACD.

3) Pour tout nombre complexe $z \neq 1 + 2i$; on pose : $f(z) = \frac{z - 3 + 2i}{z - 1 - 2i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{20}$.

Exercice 5

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :
 $z^2 - 2z - 2 - 4i = 0$

2) On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par :
 $P(z) = z^3 - (2 + 2i)z^2 - 2z - 8 + 4i$.

a) Calculer $P(2i)$ et déterminer deux réels a et b tels que
 $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$

b) Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = (1+i)^2$, $z_B = \frac{5+5i}{2+i}$ et $z_C = \frac{1-5i}{2+3i}$.

a) Donner la forme algébrique de z_A , z_B et z_C

b) Placer les points A, B et C

c) Déterminer et construire l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

4) Soit f l'application définie pour tout complexe $z \neq 3+i$ par $f(z) = \frac{(1-i)z + 2}{z - 3 - i}$

Montrer que pour tout $z \neq 3+i$, on a : $f(z) = (1-i) \frac{z+1+i}{z-3-i}$

5) Déterminer et construire les ensembles de points M dans chacun des cas suivants :

a. Γ_1 tel que $|f(z)| = \sqrt{2}$.

b. Γ_2 tel que $\arg(f(z)) = \frac{\pi}{4} [\pi]$

c. Γ_3 tel que $\arg(f(z)) = \frac{3\pi}{4} [\pi]$

d. Γ_4 tel que $|f(z) - 1 + i| = 2\sqrt{10}$.

Exercice 6

1) Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - 10z^2 + 33z - 34$.

a) Calculer $P(2)$.

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a :

$$P(z) = (z-2)(z^2 + az + b).$$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$. On note z_0 ; z_1 et z_2 les solutions de (E) telles que $\text{Im}(z_2) < \text{Im}(z_0) < \text{Im}(z_1)$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = z_1 + 3i$, $z_B = z_2 + i$ et $z_C = 6 + 2i$.

a) Vérifier que $z_A = 4 + 4i$ et $z_B = 4$.

b) Ecrire les nombres z_A et z_B sous forme trigonométrique.

c) Placer les points A, B et C dans le repère.

3) Pour tout nombre $z \neq 4 + 4i$ on pose : $f(z) = \frac{z-4}{z-4-4i}$.

a) Vérifier que $f(z_C) = i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

4) Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = (z_A)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n .

a) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels le point M_n appartient à l'axe des abscisses.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n > 2015$.

Exercice 7

1) Pour tout complexe z on pose : $P(z) = z^3 - 10z^2 + 36z - 40$

a) Calculer $P(2)$

b) Déterminer les réels a et b tels que pour tout z on a :
 $P(z) = (z-2)(z^2 + az + b)$

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B et C d'affixes respectives :
 $z_A = 4 - 2i$, $z_B = 2$ et $z_C = 4 + 2i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Déterminer la nature du triangle ABC .

c) Déterminer l'affixe z_D du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z \neq 4 + 2i$; on pose : $f(z) = \frac{z - 4 + 2i}{z - 4 - 2i}$.

a) Vérifier que $f(z_D) = i$ et interpréter graphiquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$

4) On pose $z_0 = f(2i)$. Pour tout entier naturel n on note $z_n = z_0^n$.

a) Ecrire z_0 sous forme algébrique, puis vérifier que $z_0 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n telle que $|z_n| \geq 2017$.

c) Vérifier que le point d'affixe z_{2018} appartient à l'axe des imaginaires purs.

Exercice 8

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 3i)z - 4i$.

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-8 + 6i$

b) Calculer $P(i)$

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout nombre complexe z on a : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.

d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 1 - i$ et $z_C = 2 + 2i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

d) Déterminer et construire l'ensemble Γ des points M du plan d'affixe z tel que $\left| \frac{z - 2 - 2i}{z - 1 + i} \right| = 1$.

3) Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = (z_C)^n$ et $v_n = |z_n|$.

a) Vérifier que $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis en déduire l'écriture trigonométrique de z_n .

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

c) Calculer la limite de (v_n) et exprimer en fonction de n la somme $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

Exercice 9 (Bac)

1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $-3 + 4i$

b) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^2 + (3 - 6i)z - 6 - 10i = 0$.

2) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -2 + 2i$; $z_B = i$ et $z_C = -1 + 4i$.

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABDC soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre complexe $z \neq i$; on pose : $f(z) = \frac{z + 1 - 4i}{z - i}$.

a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

b) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur.

c) Déterminer et construire l'ensemble Γ_3 des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{2}$.

4) On pose, pour tout entier $n \geq 1$; $z_n = (z_A)^n$.

a) Ecrire z_n sous forme trigonométrique.

b) Déterminer la longueur du segment OM_{2019} , où M_{2019} est le point d'affixe z_{2019} .

Exercice 10

Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, on pose:

$$P(z) = z^3 - (4 + 8i)z^2 + (-16 + 20i)z + 24 + 8i.$$

1.a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les complexes α et β tels que pour tout complexe z on a:

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

c) Résoudre l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 11

On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation suivante :

$$z^2 + 6z + 25 = 0 \quad (E)$$

1) Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 solutions de (E) tels que $\text{Im}(z_1) > 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = z_1 - 6i$, $z_B = z_2 + 4$ et $z_C = -1 + 2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Déterminer la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABDC soit un parallélogramme.

3) Pour tout nombre $z \neq 3$, on pose : $f(z) = \frac{z + 3 + 2i}{z - 3}$.

a) Calculer le nombre $\alpha = f(5 - 6i)$ puis l'écrire sous forme algébrique et trigonométrique.

b) Déterminer Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer Γ_2 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{10}$.

Exercice 12

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) Pour tout nombre complexe z , on pose : $P(z) = z^3 - (2 + 6i)z^2 - 11z - 8 + 6i$

a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe $Z = 32i$.

b) Calculer $P(2i)$.

c) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z de $\mathbb{C}$:
 $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$

d) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $P(z) = 0$.

2) Soient A , B et C les points d'affixes respectives : $z_A = -1$; $z_B = 2i$ et $z_C = 3 + 4i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

c) Déterminer et représenter l'ensemble Γ des points M d'affixe z telle que le nombre $\frac{z - 2 - 2i}{z - 2i}$ soit imaginaire pur.

3) Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = (z_D)^n$ et soit M_n le point d'affixe z_n .

a) Ecrire z_n sous forme exponentielle. Montrer que le nombre z_{2020} est réel.

b) Déterminer l'ensemble des entiers n pour lesquels on a $OM_n \geq 2020$.

4) Pour tout entier naturel n , on pose $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

b) On pose $S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \dots + M_nM_{n+1}$. Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 13

1. Pour tout nombre complexe z on pose : $P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (2 - 4i)z - 4i$.

a) Calculer $P(2i)$.

b) Déterminer les nombres a et b tels que pour tout z on a :
 $P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$.

c) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexe, l'équation $P(z) = 0$.

2. On considère, dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = -1 - i$, $z_B = 2i$ et $z_C = -1 + i$.

a) Placer les points A , B et C dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

c) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z telle que :
 $|z + 1 - i| = 3$.

Exercice 14 (Bac)

1. a) Calculer $(4 - 2i)^2$.

b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 + (2 - 4i)z - 6 = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = 1 + i$, $z_B = -3 + 3i$ et
 $z_C = \frac{(z_B)^3}{(z_A)^5}$.

a) Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres z_A , z_B puis en déduire celle de z_C .

b) Placer les points A et B dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

c) Ecrire sous forme algébrique le nombre $\frac{z_B}{z_A}$ puis interpréter géométriquement.

3) Pour tout nombre complexe $z \neq 1 + i$; on pose : $f(z) = \frac{z + 3 - 3i}{z - 1 - i}$.

a) Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $f(z) = i$. Interpréter géométriquement.

b) Déterminer et construire Γ_1 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que
 $|f(z)| = 1$.

c) Déterminer et construire Γ_2 l'ensemble des points M d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur ou nul.

d) Déterminer et construire Γ_3 l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z) - 1| = \sqrt{5}$.

Exercice 15 (Traduit)

Soit z un nombre complexe ; $z \neq 3i$.

On pose : $f(z) = \frac{-z - 2 - i}{z - 3i}$.

1) Déterminer $z_1 = f(i)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

2) Déterminer $z_2 = f(1)$ puis l'écrire sous formes algébrique et trigonométrique.

3.a) Déterminer le nombre $z_3 = f(1 - i)$ puis l'écrire sous forme algébrique.

b) On pose $\theta = \arg z_3$.

Calculer $\cos \theta$ et $\sin \theta$. En déduire une écriture trigonométrique du nombre $z_3 = f(1 - i)$.

4) Déterminer puis construire dans le plan complexe l'ensemble Γ_1 des points M d'affixe z telle que $|f(z)| = 1$.

5) Déterminer puis construire dans le plan complexe l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z telle que $|f(z) + 1| = 2\sqrt{5}$.

ليكن z عددا عقديا ، $z \neq 3i$ ؛

نضع : $f(z) = \frac{-z - 2 - i}{z - 3i}$.

(1) عين العدد $z_1 = f(i)$ واكتبه على الشكلين الجبري والمثلثي.

(2) عين العدد $z_2 = f(1)$ واكتبه على الشكلين الجبري والمثلثي.

3.a) عين العدد $z_3 = f(1 - i)$ واكتبه على الشكل الجبري.

(b) نضع $\theta = \arg z_3$.

احسب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ واستنتج كتابة مثلثية للعدد $z_3 = f(1 - i)$.

(4) عين ثم مثل في المستوي العقدي Γ_1 مجموعة النقط M ذات اللاحق z بحيث $|f(z)| = 1$.

(5) عين ثم مثل في المستوي العقدي Γ_2 مجموعة النقط M ذات اللاحق z بحيث $|f(z) + 1| = 2\sqrt{5}$.

Exercice 16 (Traduit)

1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $(E_1) : z^2 - 4z + 16 = 0$

2) Ecrire les solutions sous forme trigonométrique.

3) Soit le nombre complexe $u = 2 - 2i\sqrt{3}$.

a) En utilisant la forme trigonométrique du nombre u ; déduire tous les nombres complexes z vérifiant $Z^4 = u$.

b) Déterminer algébriquement tous les nombres complexes x vérifiant $X^2 = u$, puis en déduire de nouveau les nombres complexes z vérifiant $Z^4 = u$.

c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et

$$\sin \frac{11\pi}{12}.$$

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية المعادلة $(E_1) : z^2 - 4z + 16 = 0$

2) اكتب الحلين على الشكل المثلثي.

3) ليكن العدد العقدي $u = 2 - 2i\sqrt{3}$.

a) باستخدام الشكل المثلثي للعدد u ; استنتج كل الأعداد العقدية Z التي تحقق $Z^4 = u$.

b) عين جبريا كل الأعداد العقدية X التي تحقق $X^2 = u$ ثم استنتج من جديد الأعداد العقدية Z التي تحقق $Z^4 = u$.

c) استنتج قيم $\cos \frac{11\pi}{12}$ و

$$\sin \frac{11\pi}{12}.$$

Exercice 17 (Traduit)

Dans l'ensemble des nombres complexes

on pose $P(z) = \frac{z-1+6i}{z+4-i}$

1) Calculer puis écrire sous forme algébrique chacun des nombres suivants : $P(-1)$, $P(3+6i)$ et $P(-4+3i)$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 1-i$ et écrire la solution sous forme algébrique.

3) On muni le plan complexe d'un repère

في مجموعة الأعداد العقدية نضع:

$$P(z) = \frac{z-1+6i}{z+4-i}$$

1) احسب ثم اكتب على الشكل الجبري كلا من الأعداد التالية : $P(-1)$, $P(3+6i)$ و $P(-4+3i)$

2) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 1-i$ ثم اكتب حلها على الشكل الجبري.

3) ننسب المستوي العقدي إلى معلم قائم

orthonormal direct $(O, \bar{u}, \bar{v})$. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans les cas suivants :

a) $|P(z)| = 1$.

b) Le nombre $P(z)$ est réel.

4) On pose $Z = P(3 + 6i)$. Soit $M_1 ; M_n$ les points d'affixes respectives Z et Z^n ; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $Z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$.

b) Ecrire Z^n sous forme trigonométrique.

c) Déterminer et représenter dans le plan les points $M_1 ; M_2 ; M_3$.

d) Montrer que le triangle OM_1M_2 est rectangle isocèle en M_1 .

5.a) Pour quelles valeurs de n ; le point M_n est situé sur l'axe (Ox) ?

b) Montrer que les points $O ; M_4 ; M_{2008}$ sont alignés.

6.a) On pose $U_n = |z_{n+1} - z_n|$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique. Déterminer sa raison et son premier terme.

b) On pose

$$S_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1} .$$

Calculer S_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

ومنتظم $(O; \bar{u}, \bar{v})$. عين ثم مثل في المستوي مجموعة النقط M ذات اللاحق z في كل من الحالتين التاليتين:

(a) $|P(z)| = 1$

(b) العدد $P(z)$ حقيقي.

(4) نضع $Z = P(3 + 6i)$. ولتكن النقطتان M_1 و M_n صورنا العددين Z و Z^n حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) بين أن $Z = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

(b) اكتب Z^n على الشكل المثلثي.

(c) حدد ثم مثل في المستوي النقط M_1, M_2, M_3 .

(d) بين أن المثلث OM_1M_2 قائم ومتساوي الساقين في M_1 .

5.a) من أجل أي قيمة للعدد n تقع M_n على محور الفواصل؟

(b) بين أن النقط O, M_4, M_{2008} مستقيمة.

6.a) نضع $U_n = |z_{n+1} - z_n|$ ؛ بين أن (U_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

(b) نضع

$$S_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \dots + M_nM_{n+1}$$

احسب S_n بدلالة n ثم احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.